الشبكات الجزئية:

تعريف: إذا كانت $(E, \leq, \vee, \wedge)$ شبكة عندئذ نقول عن المجموعة الجزئية غير الخالية S من E إذا كانت S شبكة تحت مفهوم العمليات $\vee, \wedge, \leq$

* ينتج من التعريف أن الشرط اللازم والكافي لتكون المجموعة غير الخالية $S \subseteq E$ شبكة جزئية هو أن يتحقق الشرط:

$$\forall x, y \in S ,\ x \vee y \in S \quad \text{و} \quad x \wedge y \in S$$

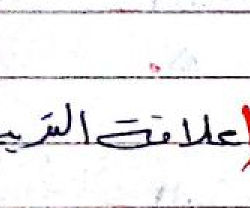
أمثلة:

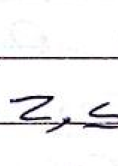
1- $(\mathbb{Z}^+, \leq, \vee, \wedge)$ شبكة جزئية من $(\mathbb{Z}, \leq, \vee, \wedge)$ (علاقة الترتيب العادية)

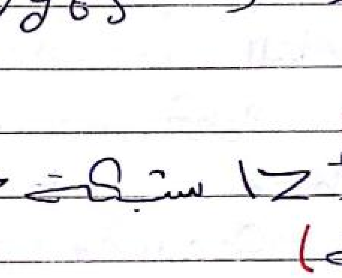
2- وأيضاً $(\mathbb{N}, \leq, \vee, \wedge) \subseteq (\mathbb{Z}, \leq, \vee, \wedge) \subseteq (\mathbb{Q}, \leq, \vee, \wedge) \subseteq (\mathbb{R}, \leq, \vee, \wedge)$ هي شبكات جزئية من بعضها.

3- في أي شبكة $(E, \leq, \vee, \wedge)$ وإذا كان $x, y \in E$ فإن: $[x, y]$ ، $\forall z \in E ,\ x \leq z \leq y$ هي شبكة جزئية

4- إن الشبكات $D(6), D(2), D(20)$ كلها شبكات جزئية من الشبكة المرتبة جزئياً بواسطة القسمة $(\mathbb{N}, \leq, \vee, \wedge)$







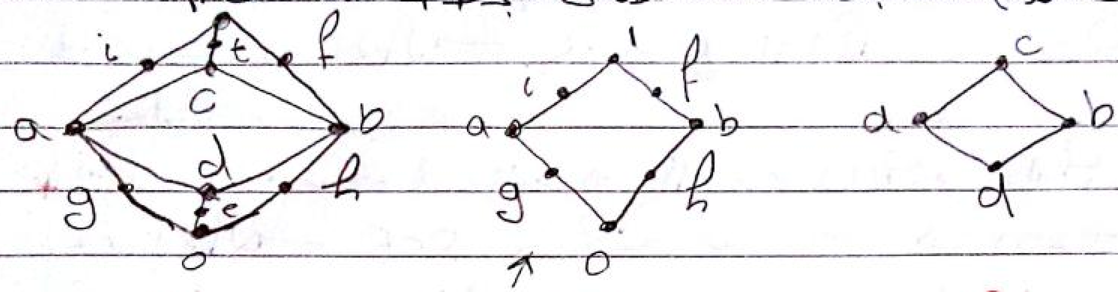
$D(20) = \{1, 2, 4, 5, 10\}$

ملاحظات مهمة:

قد تكون بعض الشبكات فيها مجموعات جزئية منها تحت علاقة الترتيب نفسها ولكن دون أن تكون شبكة جزئية منها ويحصل ذلك عندما يتباين الحد الأعلى الأصغري والحد الأدنى الأعظمي، مع العلم أن هذه المجموعات الجزئية يمكن أن تكون شبكة بذاتها دون أن تكون شبكة جزئية

منها و المثال التالي يوضح ذلك

مثال: ليكن لدينا الشبكات الممثلة بمخططات هاسه:



(1) $a \vee b = c \neq a \vee b = 1$ (2) (3)

- الشبكة (2) ليست شبكة جزئية من 1 للتباين

• هي شبكة بحد ذاتها لكنها ليست شبكة جزئية

في (2) $a \vee b = 1 \neq a \vee b = c$ في (1)

- الشبكة (3) هي شبكة جزئية في الشبكة (1)

الجداء المباشر للشبكات:

مبرهنة: إذا كانت $(E_1, \leq, \vee, \wedge)$ و $(E_2, \leq, \vee, \wedge)$ شبكتين عندئذ فإن: $(E_1 \times E_2, \leq, \vee, \wedge)$ هي شبكة من خلال:

1) $(a_1, b_1) \leq (a_2, b_2) \iff a_1 \leq a_2$ و $b_1 \leq b_2$

2) $(a_1, b_1) \vee (a_2, b_2) = (a_1 \vee a_2, b_1 \vee b_2)$

3) $(a_1, b_1) \wedge (a_2, b_2) = (a_1 \wedge a_2, b_1 \wedge b_2)$

الإثبات:

وجدنا من المجموعات المرتبة جزئياً أنه إذا كان:

1) $(a_1, b_1) \leq (a_2, b_2) \Rightarrow a_1 \leq a_2 , b_1 \leq b_2$

فإن $(E_1 \times E_2, \leq)$ مجموعة مرتبة جزئياً

2) $(d_1, d_2) = (a_1, b_1) \vee (a_2, b_2)$

حالما (d_1, d_2) الحد الأعلى الأصغري للعنصرين فإن

$(a_1, b_1) \leq (d_1, d_2)$ و $(a_2, b_2) \leq (d_1, d_2)$

ومنه $\Rightarrow a_1 \leq d_1$ و $a_2 \leq d_1$

أيضاً $b_1 \leq d_2$ و $b_2 \leq d_2$

حيث أن d_1 هو حد أعلى للعنصرين a_1, a_2

و d_2 هو حد أعلى للعنصرين b_1, b_2

ومنه: $(a_1 \vee a_2) \le d_1$ و $(b_1 \vee b_2) \le d_2$

الحد الأعلى الأصغر

$(a_1 \vee a_2, b_1 \vee b_2) \le (d_1, d_2)$ ...[1]

بما أن: $a_1 \le a_1 \vee a_2$ و $b_1 \le b_1 \vee b_2$

أيضاً $a_2 \le a_1 \vee a_2$ و $b_2 \le b_1 \vee b_2$

ومنه إن $(a_1, b_1) \le (a_1 \vee a_2, b_1 \vee b_2)$

$(a_2, b_2) \le (a_1 \vee a_2, b_1 \vee b_2)$ أن الحد أعلى للعنصرين (a_2, b_2) ، (a_1, b_1)

الحد الأعلى الأصغر

$(d_1, d_2) = (a_1, b_1) \vee (a_2, b_2) \le (a_1 \vee a_2, b_1 \vee b_2) = d_1$ ...[2]

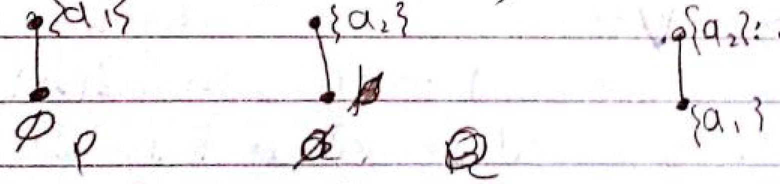
من [1] و [2] ينتج أن $(a_1, b_1) \vee (a_2, b_2) = (a_1 \vee b_1) \vee (a_2 \vee b_2)$

مثال: لتكن لدينا المجموعات التالية:

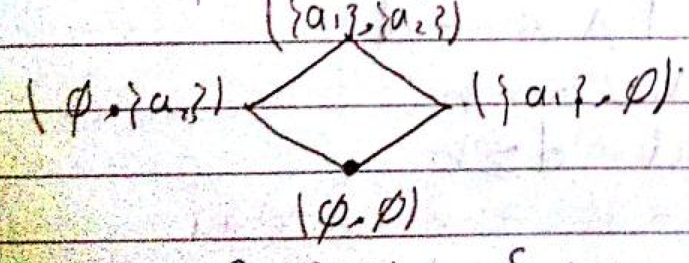
$Q = \{\phi, \{a_2\}\}$　　$P = \{\phi, \{a_1\}\}$　　$U = \{a_1, a_2\}$

المطلوب أوجد $(P \times Q, \le)$ ، $(P \times P \times P, \le)$ مع رسم مخطط هاس لهذه الشبكات:

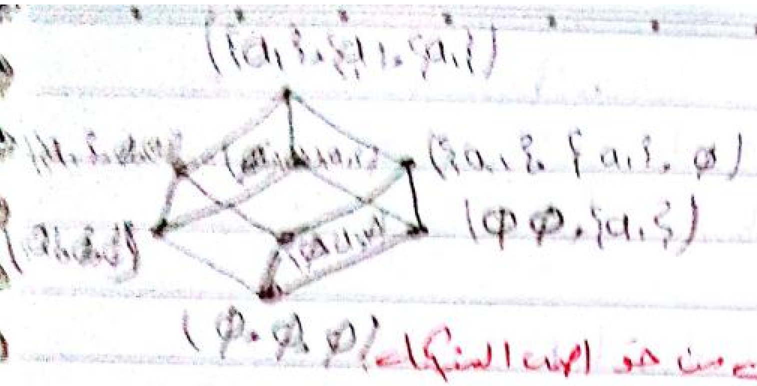
الحل:



$P \times Q = \{(\phi, \phi), (\phi, \{a_2\}), (\{a_1\}, \phi), (\{a_1\}, \{a_2\})\}$



$P \times P \times P = \{(\phi, \phi, \phi), (\phi, \phi, \{a_1\}), (\phi, \{a_1\}, \phi),$
$(\{a_1\}, \phi, \phi), (\{a_1\}, \phi, \{a_1\}), (\{a_1\}, \{a_1\}, \phi), (\{a_1\}, \{a_1\}, \{a_1\}),$
$\phi, \{a_1\}, \{a_1\}\}$.



مبرهنة (متباينات التوزيع): يمكن أن نثبت من خواص الحد الأعلى والأدنى أنه في أي شبكة $(L, \wedge, \vee, \leq)$ تتحقق المتراجحتين:

1. $x \wedge (y \vee z) \geq (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$
2. $x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

$\forall x, y, z \in L$

الإثبات:

1/ بما أن $x \wedge y \leq x \wedge (y \vee z)$ حد أعلى

$x \wedge z \leq x \wedge (y \vee z)$ للعنصرين $x \wedge y$ و $x \wedge z$

ومنه $(x \wedge y) \vee (x \wedge z) \leq x \wedge (y \vee z)$

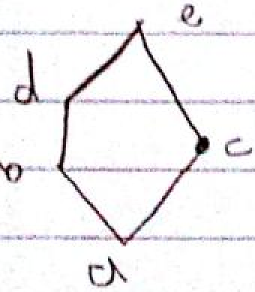
2/ $x \vee y \geq x \vee (y \wedge z)$ حد أدنى

$x \vee z \geq x \vee (y \wedge z)$ للعنصرين $x \vee y$ و $x \vee z$

فالحد الأدنى وبالتالي فإن: $(x \vee y) \wedge (x \vee z) \geq x \vee z$

ملاحظة: إن المساواة في (1) و(2) ليست صحيحة في الحالة العامة.

مثال: لدينا الشبكة ممثلة بمخطط هاس:



$d \wedge (b \vee c) = d \wedge e = d$

$(d \wedge b) \vee (d \wedge c) = b \vee a = b$

$d \geq b$ أي المساواة غير صحيحة.

أنواع الشبكات:

1- الشبكة التوزيعية: نقول عن الشبكة أنها شبكة توزيعية إذا حققت عناصرها أحد الشرطين التاليين:

1- $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

2- $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

الموضوع $\wedge \vee = \cap \cup$ التاريخ / / 201

التقاطع والاتحاد

أمثلة: نظرية المجموعات

1- $(\wp(E), \subseteq, \vee, \wedge)$ ، $E = \{a, b, c\}$

هي شبكات توزيعية

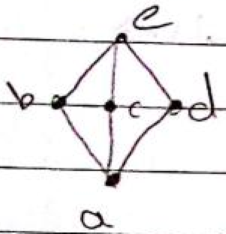
2- $(\mathbb{N}, /, \vee, \wedge)$ شبكة توزيعية

3- ان كل شبكة جزئية من شبكة توزيعية هي أيضاً توزيعية

$D(6)$ ، $D(12)$ ، $D(30)$ ..... هي شبكات توزيعية

من الشبكة $(\mathbb{N}, /, \vee, \wedge)$.

4- لنأخذ الشبكة التالية الممثلة بمخطط هاس.



ان هذه الشبكة ليست توزيعية لأنه:

$$b \wedge (c \vee d) = b \wedge e = b$$

$$(b \wedge c) \vee (b \wedge d) = a \wedge a = a$$

$b \geq a$ اذا الشبكة ليست توزيعية لأن $a \neq b$

ملاحظة: لقد سبق وعرفنا الشبكة التوزيعية على أنها توزيعية اذا حققت أحد الشرطين الموجودين في التعريف وهذا صحيح لأنه يوجد تكافؤ بين هذين الشرطين:

لنبرهن على تكافؤ الشرطين:

[1] ⟸ [2] لدينا بالفرض ان [1] محقق لاحتمال خواص الشبكات

$$x \vee (y \wedge z) = [x \vee (x \wedge z)] \vee (y \wedge z)$$

$$\text{بالتجميع} \quad = x \vee [(x \wedge z) \vee (y \wedge z)]$$

$(x \vee y) \wedge z$ حسب [1] المعطى

$$\text{حسب خاصية الامتصاص} \quad = x \vee [(x \vee y) \wedge z]$$

$$= [x \wedge (x \vee y)] \vee [(x \vee y) \wedge z]$$

$$= (x \vee y) \wedge (x \vee z) \quad \text{حسب القانون الاول}$$

ولنفس الطريقة نثبت العكس

نتيجة: من التعريف السابق كل أن الشبكة تكون توزيعية اذا حققت عناصرها أحد المتراجحتين التاليتين:

$$x \wedge (y \vee z) \leq (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

$$x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$

متراجحات العكس

2 الشبكات المودولية (المعيارية): نقول عن الشبكة $(L, \vee, \wedge, \leq)$ أنها مودولية أو معيارية إذا حققت عناصرها الشرط التالي:

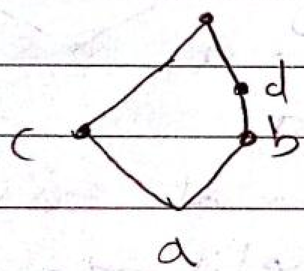
$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z \quad ; \quad x \leq z$$

إن كل شبكة توزيعية هي شبكة مودولية وذلك لأنه إذا كان $x \leq z$ فإن $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

$$= (x \vee y) \wedge z$$

والعكس ليس صحيحاً في الحالة العامة.

هل الشبكة الممثلة بالشبكة التالية هي شبكة مودولية



$b \leq d$

$b \vee (c \wedge d) =$

$b \vee a = b$

ليست شبكة مودولية

كل شبكة جزئية من شبكة مودولية هي أيضاً مودولية